

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 03 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεώρημα || Βιβλίο Επιτυχία || Κεφάλαιο 2 || Σελίδα 109

A2. Θεώρημα || Βιβλίο Επιτυχία || Κεφάλαιο 1 || Σελίδα 86

A3. Ορισμός || Βιβλίο Επιτυχία || Κεφάλαιο 3 || Σελίδα 1

A4. α) Λάθος β) Σωστό γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $D_{f \circ g} : \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2, +\infty) \\ \sqrt{x-2} + 1 \in (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2, +\infty) \\ \sqrt{x-2} + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2, +\infty) \\ \sqrt{x-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2, +\infty) \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2, +\infty)$, δηλαδή $D_{f \circ g} = (2, +\infty)$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x-2} + 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2}) = \\ &= \ln(\sqrt{x-2})^2 = \ln(x-2) \end{aligned}$$

Τελικά $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln(x-2)$, $x > 2$

B2. Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $(2, +\infty)$ ως σύνθεση λογαριθμικής με πολυωνμική και έχουμε

$$h'(x) = [\ln(x-2)]' = \frac{(x-2)'}{x-2} = \frac{1}{x-2} > 0 \text{ για κάθε } x \in (2, +\infty), \text{ διότι } x > 2 \Leftrightarrow x-2 > 0$$

Άρα η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$, επομένως και “1-1”

Για την αντίστροφη συνάρτηση ισχύει

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^y = e^{\ln(x-2)} \Leftrightarrow e^y = x-2 \Leftrightarrow x = e^y + 2$$

Για το πεδίο ορισμού της $h^{-1}(x)$ πρέπει $x > 2 \Leftrightarrow e^y + 2 > 2 \Leftrightarrow e^y > 0 \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$

Τελικά είναι $h^{-1}(x) = e^x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

B3. $\lim_{x \rightarrow 2} \left[h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\ln(x-1) \cdot \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \right] = -\infty$ διότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-2) \stackrel{\text{Θέτουμε } u=x-2 \text{ και όταν } x \rightarrow 2}{\text{τότε } u \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)=0}}{\lim_{u \rightarrow 0} \ln u} = -\infty$$

και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 \ln(x-1))'}{(x-2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-1)'}{1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{2-1} = 2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Εφόσον έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, ισχύει $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} \in \mathbb{R}$

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x$$

Αν $\kappa > 0$ ή $\kappa < 0$, τότε το όριο βγαίνει $+\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα

Επομένως για να είναι το όριο πεπερασμένο πρέπει $\kappa = 0$.

ii) Εφόσον η $y = x$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $O(0, 0)$ ισχύει $f'(0) = 1$

$$\begin{aligned} \text{Για } \kappa = 0 \text{ είναι } f'(x) &= \left(\frac{\mu x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(\mu x)' \cdot (x^2 + 1) - \mu x \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu(x^2 + 1) - \mu x \cdot x^2}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-\mu x^2}{(x^2 + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα είναι } f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{-\mu \cdot 0^2 + \mu}{(0^2 + 1)^2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\mu = 1}$$

Γ2. Για $\kappa=0$, $\mu=1$ είναι $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$

i) Έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Εφόσον $(x^2+1)^2 > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
το πρόσημο της $f'(x)$ προκύπτει από
το $1-x^2$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$		↘	↗	↘
		T.E.	T.M.	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$.

Επίσης παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=-1$ με τιμή $f(-1)=\frac{-1}{(-1)^2+1}=-\frac{1}{2}$ και τοπικό

μέγιστο για $x=1$ με τιμή $f(1)=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}$

Επιπλέον $\lim_{x\rightarrow-\infty} f(x) = \lim_{x\rightarrow-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\rightarrow-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\rightarrow-\infty} \frac{1}{x} = 0$

και $\lim_{x\rightarrow+\infty} f(x) = \lim_{x\rightarrow+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\rightarrow+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\rightarrow+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Επομένως στο -1 έχουμε ολικό ελάχιστο το $-\frac{1}{2}$ και στο 1 έχουμε ολικό μέγιστο το $\frac{1}{2}$

ii) Από τα ολικά ακρότατα προκύπτει άμεσα ότι $f(D_f) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Επίσης λόγω του μεγίστου ισχύει $f(x) \leq \frac{1}{2}$, επομένως για να έχει ρίζες η εξίσωση

$$f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2 \text{ πρέπει } \frac{1}{2} + \alpha^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha^2 \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

Για αυτή τη τιμή του α η εξίσωση γίνεται $f(x) = \frac{1}{2}$ το οποίο ισχύει μόνο στην θέση μεγίστου δηλαδή για $x=1$, άρα έχουμε μοναδική ρίζα.

Για κάθε άλλο α η εξίσωση είναι αδύνατη.

$$\Gamma 3. \text{ i) } I_v + I_{v+1} = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(v+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1} (1+x^2)}{x^2+1} dx =$$

$$= \int_0^1 x^{2v+1} dx = \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \frac{1^{2v+2}}{2v+2} - \frac{0^{2v+2}}{2v+2} = \frac{1}{2v+2}$$

$$\text{ii) } I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \left[\ln|x^2+1| \right]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln|1^2+1| - \ln|0^2+1|) =$$

$$= \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \boxed{I_0 = \frac{\ln 2}{2}}$$

$$\text{Για } v=0 \text{ στο (i) έχουμε } I_0 + I_1 = \frac{1}{2 \cdot 0 + 2} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \boxed{I_1 = \frac{1 - \ln 2}{2}}$$

$$\text{Για } v=1 \text{ στο (i) έχουμε } I_1 + I_2 = \frac{1}{2 \cdot 1 + 2} \Leftrightarrow \frac{1 - \ln 2}{2} + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1 - \ln 2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_2 = \frac{1 - 2 + 2 \ln 2}{4} \Leftrightarrow \boxed{I_2 = \frac{2 \ln 2 - 1}{4}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $g(x_1) + x_1 = 0 \Leftrightarrow h(x_1) = 0$, όπου $h(x) = g(x) + x$, $x \in [-1, 0]$

Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα πολυωνυμικής με την συνεχή (ως παραγωγίσιμη) $g(x)$.

Επίσης $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$, διότι $g(x) < 1$

και $h(0) = g(0) > 0$, διότι $g(x) > 0$

Δηλαδή $h(-1) \cdot h(0) < 0$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $h(x_1) = 0$

Επιπλέον έχουμε $h'(x) = (g(x) + x)' = g'(x) + 1 \neq 0$ για $x \in [-1, 0]$, διότι $g'(x) \neq -1$

Η $h'(x)$ είναι συνεχής στο $[-1, 0]$, διότι η $g'(x)$ είναι συνεχής, και δεν μηδενίζεται στο $[-1, 0]$, άρα διατηρεί πρόσημο.

Αν είναι $h'(x) > 0$, τότε η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Αν είναι $h'(x) < 0$, τότε η $h(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα

Σε κάθε περίπτωση η $h(x)$ έχει το πολύ μια ρίζα.

Επομένως το x_1 είναι μοναδική ρίζα.

Δ2. Έχουμε $f(0) = 2\eta\mu 0 + \varepsilon\phi 0 - \kappa \cdot 0 = 0$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 (g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x(g(x) + x)] \stackrel{g \text{ συνεχής}}{=} 0(g(0) + 0) = 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\phi x}{x} - \frac{\kappa x}{x} \right) = 2 \cdot 1 + 1 - \kappa = 3 - \kappa$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon\phi x}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\varepsilon\phi x)'}{(x)'} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 0} = 1$$

$$\text{Εφόσον } f \text{ παραγωγίσιμη (και στο } 0) \text{ θα ισχύει } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 3}$$

$$\text{Δ3. Για } \kappa = 3 \text{ είναι } f(x) = \begin{cases} x^2 (g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

i) Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x)' = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x + 1 - 3\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) - (\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot 2(\sigma\upsilon\nu x - 1) \left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{2(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 \left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0 \text{ διότι όλοι οι παράγοντες είναι θετικοί στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ εφόσον είναι και συνεχής στο 0.

Για $x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ με την ισότητα μόνο για $x = 0$

ii) Είναι $3f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$,

επομένως $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty)$ διότι

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) = +\infty, \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x - 3x) = 2\eta\mu \frac{\pi}{2} - 3 \cdot \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{3\pi}{2}$$

και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \epsilon\phi x = +\infty$

Άρα $\frac{\pi}{3} \in [0, +\infty)$, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα x_2 της εξίσωσης $f(x) = \frac{\pi}{3}$ η οποία είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας της $f(x)$.

Δ4. i) Από (Δ1) είχαμε $h(x)$ γνησίως μονότονη στο $[-1, 0]$, άρα και στο $[x_1, 0] \subseteq [-1, 0]$

Αν $h(x)$ γνησίως φθίνουσα, τότε για $x_1 < 0 \Leftrightarrow h(x_1) > h(0) \Leftrightarrow 0 > g(0)$ το οποίο είναι ΑΤΟΠΟ διότι γνωρίζουμε ότι $0 < g(x) < 1$.

Επομένως $h(x)$ γνησίως αύξουσα και για $x_1 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow h(x_1) \leq h(x) \leq h(0) \Leftrightarrow 0 \leq h(x) \leq g(0)$

Άρα $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$

Για $[x_1, 0)$ είναι $f(x) = x^2 h(x) \geq 0$ και για $x = 0$ είναι επίσης $f(0) = 0^2 h(0) = 0$

Τελικά $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$

ii) Το εμβαδόν του Ω είναι

$$\int_{x_1}^{f(x_2)} |f(x)| dx = \int_{x_1}^{\pi/3} |f(x)| dx \underbrace{\frac{f(x) \geq 0}{x \in [x_1, \frac{\pi}{2})}}_{I_1} \int_{x_1}^0 x^2 (g(x) + x) dx + \underbrace{\int_0^{\pi/3} 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x dx}_{I_2}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x_1}^0 x^2 (g(x) + x) dx = \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx = \int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3}\right)' \cdot g(x) dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^0 = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \cdot g(x)\right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} \cdot g'(x) dx + \frac{0^4}{4} - \frac{x_1^4}{4} = \frac{0^3}{3} \cdot g(0) - \frac{x_1^3}{3} \cdot g(x_1) - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx - \frac{x_1^4}{4} = \\ &= -\frac{x_1^3}{3} (-x_1) - \frac{x_1^4}{4} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{3} - \frac{x_1^4}{4} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\pi/3} 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x \, dx = \int_0^{\pi/3} 2\eta\mu x + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - 3x \, dx = \int_0^{\pi/3} 2\eta\mu x + \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} - 3x \, dx = \\
&= \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln|\sigma\upsilon\nu x| - 3\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/3} = \\
&= \left(-2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \ln\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right| - 3\frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{2} \right) - \left(-2\sigma\upsilon\nu 0 - \ln|\sigma\upsilon\nu 0| - 3\cdot\frac{0^2}{2} \right) = \\
&= -\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} - \ln\frac{1}{2} - \cancel{3} \frac{\pi^2}{\cancel{18}_6} + 2 \cdot 1 + \ln 1 - 3 \cdot 0 = -1 - \ln 2^{-1} - \frac{\pi^2}{6} + 2 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Εφόσον ο $y'(x=0)$ χωρίζει το εμβαδόν στη μέση ισχύει

$$\begin{aligned}
I_1 = I_2 &\Leftrightarrow \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) \, dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) \, dx = -\frac{x_1^4}{12} - \frac{\pi^2}{6} + \ln 2 + 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) \, dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3
\end{aligned}$$