ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 02 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα || Βιβλίο Επιτυχία || Κεφάλαιο 3 || Σελίδες 1

Α2. Θεώρημα || Βιβλίο Επιτυχία || Κεφάλαιο 1 || Σελίδα 164 - 165

Α3. Ορισμός || Βιβλίο Επιτυχία || Κεφάλαιο 2 || Σελίδα 185

Α4. **α)** Σωστό — Θεωρία || Βιβλίο Επιτυχία || Κεφάλαιο 1 || Σελίδα 45

β) Σωστό — Θεωρία || Βιβλίο Επιτυχία || Κεφάλαιο 1 || Σελίδα 19

γ) Λάθος — Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$

δ) Λάθος — Βρίσκεται από κάτω και όχι από πάνω

ε) Σωστό — Θεώρημα || Βιβλίο Επιτυχία || Κεφάλαιο 2 || Σελίδα 36

ΘΕΜΑ Β

Β1. Εφόσον το $x_0 = 1$ είναι εσωτερικό του D_f, η f είναι παραγωγίσιμη εκεί και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(1) = 0$.

Είναι $f'(x) = (x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3)' = 3x^2 + 2\alpha x + 9 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

Άρα έχουμε $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 + 2\alpha \cdot 1 + 9 = 0 \Leftrightarrow 12 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -12 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -6}$

Β2. Για $\alpha = -6$ είναι $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, $x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $x \in \mathbb{R}$

Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3$ ή $x = 1$

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμων της $f'(x)$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Λόγω της συνέχειας της f στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη) και της μονοτονίας της έχουμε

$$f\left((-\infty,1]\right)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ f(1)\right] \quad , \quad f\left([1,3]\right)=\left[f(3),\ f(1)\right] \ \text{ και } \ f\left([3,+\infty)\right)=\left[f(3)\,,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-6x^2+9x-3)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

$f(1)=1^3-6\cdot1^2+9\cdot1-3=1$

$f(3)=3^3-6\cdot3^2+9\cdot3-3=27-54+27-3=-3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-6x^2+9x-3)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

Επομένως $f\left((-\infty,1]\right)=\left(-\infty,1\right]$, $f\left([1,3]\right)=\left[-3,1\right]$ και $f\left([3,+\infty)\right)=\left[-3\,,+\infty\right)$

Σε κάθε διάστημα ανήκει το 0, άρα έχουμε τουλάχιστον μια ρίζα, δηλαδή τουλάχιστον 3 ρίζες συνολικά, όμως η $f(x)$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού, άρα έχει το πολύ 3 ρίζες συνολικά. Τελικά έχουμε 3 ρίζες ακριβώς.

Στα διαστήματα $[1,3]$ και $[3,+\infty)$ είναι προφανώς θετικές οι ρίζες.

Για το διάστημα $(-\infty,1]$ και για $x\le 0 \xLeftrightarrow{f\nearrow(-\infty,1]} f(x)\le f(0) \Leftrightarrow f(x)\le -3$, δηλαδή δεν έχουμε την ρίζα για $x\in(-\infty,0]$, άρα θα είναι $x\in(0,1]$, δηλαδή θα είναι θετική.

B3. Είναι $f''(x)=(3x^2-12x+9)'=6x-12$, $x\in\mathbb{R}$

Έχουμε $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-12=0 \Leftrightarrow 6x=12 \Leftrightarrow x=2$

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμων για την $f''(x)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		∩		∪	
			Σ.Κ.		

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$ και κυρτή στο $[2,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $\mathrm{K}\left(2,\ f(2)\right)$, όπου $f(2)=2^3-6\cdot2^2+9\cdot2-3=9-24+18-3=-1$, άρα $\mathrm{K}(2,-1)$

Β4. Η εφαπτομένη της f στο Α είναι $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)\ :\varepsilon_1$

και της g στο Β είναι $y-g(\xi)=g'(\xi)(x-\xi)\ :\varepsilon_2$

Είναι $g(\xi)=\xi+f(\xi)$ και $g'(x)=\left(x+f(x)\right)'=1+f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\Rightarrow g'(\xi)=1+f'(\xi)$

Άρα η ε_2 γίνεται $y-\xi-f(\xi)=\left(1+f'(\xi)\right)(x-\xi)$

Για το σημείο τομής με τον $y'y$ ισχύει $x=0$, άρα στην ε_2 έχουμε

$$y-\xi-f(\xi)=\left(1+f'(\xi)\right)(0-\xi)\Leftrightarrow y=\cancel{\xi+}f(\xi)\cancel{-\xi}-\xi\cdot f'(\xi)\Leftrightarrow y=f(\xi)-\xi\cdot f'(\xi)$$

Δηλαδή έχουμε το σημείο $\Gamma\left(0,\ f(\xi)-\xi\cdot f'(\xi)\right)$

Ελέγχουμε αν το Γ επαληθεύει την ε_1.

$$\cancel{f(\xi)}-\xi\cdot f'(\xi)\cancel{-f(\xi)}=f'(\xi)(0-\xi)\Leftrightarrow-\xi\cdot f'(\xi)=-\xi\cdot f'(\xi)$$ το οποίο ισχύει

επομένως οι δύο εφαπτομένες τέμνονται πάνω στον $y'y$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x=0$ είναι $f(0)=\sqrt{0^2+0}=0$

και $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^x\eta\mu x\right)=e^0\eta\mu0=1\cdot0=0$

και $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x^2+x}=\sqrt{0^2+0}=0$

Επομένως είναι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$, δηλαδή f συνεχής στο 0.

Επίσης $$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}=$$

$$\overset{x\to0^+}{\underset{x>0}{=\!=\!=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=+\infty$$, διότι $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2. Για $x<0$ η f είναι συνεχής ως γινόμενο εκθετικής με τριγωνομετρική.

Για $x>0$ η f είναι συνεχής ως ρίζα πολυωνυμικής.

Τελικά μαζί με το (Γ1) η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Ψάχνουμε για πλάγιες στα άπειρα.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}\overset{x\to+\infty}{\underset{x>0}{=\!=}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}}=\sqrt{1+0}=1=\lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}\overset{x\to+\infty}{\underset{x>0}{=\!=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}=\beta$$

Άρα η $y=x+\frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\eta\mu x\right)$

Ισχύει $|\eta\mu x|\le 1\Leftrightarrow \left|e^x\right||\eta\mu x|\le\left|e^x\right|\Leftrightarrow\left|e^x\eta\mu x\right|\le\left|e^x\right|\Leftrightarrow -e^x\le e^x\eta\mu x\le e^x$

και είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^x\right)$, άρα από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\eta\mu x\right)=0$

Επομένως η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Γ3. Για τα κοινά σημεία της $f(x)$ με την ε, έχουμε την εξίσωση $f(x)=x+\frac{1}{2}$ και εφόσον δουλεύουμε στο $[-\pi, 0]$ γίνεται $e^x\eta\mu x=x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^x\eta\mu x-x-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow g(x)=0$

όπου $g(x)=e^x\eta\mu x-x-\frac{1}{2}$, $x\in[-\pi, 0]$

Η g είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως γινόμενο και άθροισμα εκθετικής, τριγωνομετρικής και πολυωνυμικής.

Επίσης $g(-\pi) = e^{-\pi}\eta\mu(-\pi) - (-\pi) - \frac{1}{2} = -e^{-\pi}\eta\mu\pi + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$

$$g(0) = e^{0}\eta\mu 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

Δηλαδή $g(-\pi)\cdot g(0) < 0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi) = 0$ κάτι που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Γ4. Έχουμε $y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + x}$, $x \geq 0$ και επειδή μεταβάλλεται με τον χρόνο γίνεται $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$, $x(t) \geq 0$ και $t \geq 0$

Θέλουμε $y'(t) = x'(t) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2(t) + x(t)}\right)' = x'(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} \cdot \left(x^2(t) + x(t)\right)' = x'(t) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = x'(t) \Leftrightarrow \cancel{x'(t)} \cdot \frac{2x(t) + 1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = \cancel{x'(t)} \overset{x'(t)>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2x(t) + 1 = 2\sqrt{x^2(t) + x(t)} \overset{2x(t)+1>0}{\Longleftrightarrow} \left(2x(t) + 1\right)^2 = \left(2\sqrt{x^2(t) + x(t)}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(t) + 4x(t) + 1 = 4\left(x^2(t) + x(t)\right) \Leftrightarrow \cancel{4x^2(t)} + \cancel{4x(t)} + 1 = \cancel{4x^2(t)} + \cancel{4x(t)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1 = 0$ το οποίο είναι ΑΔΥΝΑΤΟ, άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 ώστε να ισχύει το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $g'(x) = \left(\frac{F(x)}{x^{\ln x}}\right)' = \frac{F'(x)\cdot x^{\ln x} - F(x)(x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x)x^{\ln x} - F(x)\left(e^{\ln x^{\ln x}}\right)'}{(x^{\ln x})^2} =$

$$= \frac{f(x)x^{\ln x} - F(x)\left(e^{\ln^2 x}\right)'}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x)x^{\ln x} - F(x)e^{\ln^2 x}\cdot(\ln^2 x)'}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x)x^{\ln x} - F(x)e^{\ln^2 x}\cdot 2\ln x\cdot(\ln x)'}{(x^{\ln x})^2} =$$

$$= \frac{f(x)x^{\ln x} - F(x)e^{\ln^2 x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x)x^{\ln x} - \frac{F(x)x^{\ln x}\cdot 2\ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2} = \frac{\cancel{x^{\ln x}}\left(f(x) - \frac{F(x)\cdot 2\ln x}{x}\right)}{(x^{\ln x})^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{xf(x) - 2F(x)\cdot\ln x}{x\cdot x^{\ln x}} = 0 \quad , \quad x > 0 \quad \text{επομένως } g(x) \text{ σταθερή.}$$

όπου $F'(x) = f(x)$, διότι $F(x)$ παράγουσα της $f(x)$

και $xf(x) = 2F(x)\ln x \Leftrightarrow xf(x) - 2F(x)\ln x = 0$, $x > 0$

Δ2. i) Αρχικά για $x=1$ έχουμε $1\cdot f(1)=2F(1)\cdot \ln 1 \Leftrightarrow f(1)=0$

Επίσης, εφόσον η εφαπτομένη της f στο Μ είναι παράλληλη στην $y=2x$ ισχύει $f'(1)=2$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\dfrac{\ln x}{x-1}}=\dfrac{f'(1)}{1}=2$, διότι

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=\!=}}\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{1}=1$$

ii) Για $x>0$, $x\neq 1$ είναι $xf(x)=2F(x)\ln x \Leftrightarrow F(x)=\dfrac{xf(x)}{2\ln x}$ και $F(x)$ συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως παραγωγίσιμη.

Άρα είναι $F(1)=\lim\limits_{x\to 1}F(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)}{2\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{f(x)}{\ln x}\right)\overset{\Delta 2(\mathrm{i})}{=\!=}\dfrac{1}{2}\cdot 2=1$

Επίσης από (Δ1) $g(x)$ σταθερή και για $x=1$ είναι $g(1)=\dfrac{F(1)}{1^{\ln 1}}=\dfrac{1}{1}=1$

επομένως $g(x)=1\Leftrightarrow \dfrac{F(x)}{x^{\ln x}}=1\Leftrightarrow F(x)=x^{\ln x}$, $x>0$

Δ3. Είναι $F'(x)=\left(x^{\ln x}\right)'=\left(e^{\ln x^{\ln x}}\right)'=\left(e^{\ln^2 x}\right)'=e^{\ln^2 x}\left(\ln^2 x\right)'=x^{\ln x}\cdot 2\ln x\cdot(\ln x)'=x^{\ln x}\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=$

$=x^{\ln x-1}\cdot 2\ln x$, $x>0$

Έχουμε $F'(x)\geq 0\Leftrightarrow x^{\ln x-1}\cdot 2\ln x\geq 0 \xLeftrightarrow{x^{\ln x-1}>0} \ln x\geq \ln 1\Leftrightarrow x\geq 1$ με την ισότητα μόνο για $x=1$

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμων για την $F'(x)$

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$	Ε	$\nearrow$	

Άρα η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Επίσης έχουμε $F(x^2)=F(x)-(x-1)^2\Leftrightarrow F(x^2)-F(x)+(x-1)^2=0\Leftrightarrow h(x)=0$ όπου
$h(x)=F(x^2)-F(x)+(x-1)^2$, $x>0$

Παρατηρούμε ότι $h(1)=F(1^2)-F(1)+(1-1)^2=0$, δηλαδή το 1 είναι ρίζα.

Για $x<1\Leftrightarrow x^2<x \xLeftrightarrow{F\searrow(0,1]} F(x^2)<F(x)$ και $(x-1)^2>0$, άρα
$F(x^2)+(x-1)^2>F(x)\Leftrightarrow F(x^2)-F(x)+(x-1)^2>0\Leftrightarrow h(x)>0$

Για $x>1$ ομοίως θα είχαμε $h(x)<0$, επομένως το 1 είναι μοναδική ρίζα.

Δ4. Ισχύει για $x \neq 0$, $e^x > x+1$,

άρα και για $x \neq 1$, $e^{\ln^2 x} > \ln^2 x + 1 \Rightarrow \int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \Leftrightarrow \mathrm{E} > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx$

Είναι $\int_1^e (\ln^2 x + 1) dx$

Θέτουμε $u = \ln x \Leftrightarrow e^u = x \Rightarrow (e^u)' \, du = (x)' \, dx \Leftrightarrow e^u du = dx$

Για $x = 1$ είναι $u = \ln 1 = 0$ και

για $x = e$ είναι $u = \ln e = 1$

Το ολοκλήρωμα γίνεται $\int_0^1 (u^2+1) \cdot e^u \, du = \int_0^1 (u^2+1) \cdot \left(e^u\right)' du =$

$$= \left[(u^2+1) \cdot e^u\right]_0^1 - \int_0^1 (u^2+1)' \cdot e^u \, du =$$

$$= (1^2+1)e^1 - (0^2+1)e^0 - \int_0^1 2u \cdot \left(e^u\right)' du =$$

$$= 2e - 1 - \left[2ue^u\right]_0^1 + \int_0^1 (2u)' \cdot e^u \, du =$$

$$= 2e - 1 - \left(2 \cdot 1 \cdot e^1 - 2 \cdot 0 \cdot e^0\right) + 2\int_0^1 e^u \, du =$$

$$= \cancel{2e} - 1 - \cancel{2e} + 2[e^u]_0^1 = -1 + 2\left(e^1 - e^0\right) = -1 + 2e - 2 = 2e - 3$$

Τελικά $\mathrm{E} > 2e - 3$